Т е о р е м а 5. Для конгруэнции $(LP)^2_{2,1}$ справедливы следующие свойства: 1/соприкасающаяся плоскость кривой (P) в точке P проходит через точку A ,2/поверхность (A) есть линейчатая поверхность с образующей AP .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1/ теоремы пять непосредственно следует из системы (5) и соотношений (9). 2/ Рассмотрим на поверхности (A) линию $\omega^2=0$.

$$(dA)_{\omega^2=0}=\omega^1\bar{e}_1\quad,\ (d\bar{e}_1)_{\omega^2=0}=-\omega^1\bar{e}_1\ ,$$

т.е. линия $\omega^2=0$ является прямой, и поверхность (A) линейчатая.

Л и т е р а т у р а.

1. Малаховский В.С., О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, 1973, 41-49.

2. Похила М.М., Пары многообразий квадратичных элементов в n -мерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.2, 1971, 43-54.

3. Новожилова Т.П., Вырожденные конгруэнции $(CL)_{4,2}$. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.4.

4. Ткач Г.П., О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. "Дифференциальная геом. многообразий фигур", вып.3, 1973, 143-153.

5. Фиников С.П., Теория конгруэнций. ГИТТЛ, М., 1950.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4 1974

О в ч и н н и к о в В.М.

РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ $\Psi_{2,3}$.

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются пары $\Psi_{2,3}[3]$, образованные конгруэнцией коник (C) и поверхностью S_2. Для подкласса таких пар решена задача расслоения от конгруэнции коник (C) к прямолинейной конгруэнции, ассоциированной с парой $\Psi_{2,3}$.

§1. Репер пары $\Psi_{2,3}$.

Отнесем пару $\Psi_{2,3}$ к реперу $R=\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$, где A_3 –характеристическая точка плоскости коники C , точки A_1, A_2 располагаются на конике таким образом, что треугольник $A_1A_2A_3$ является автополярным треугольником второго рода, вершина A_4 совмещается с текущей точкой поверхности S_2 .

Деривационные формулы репера R записываются в виде:

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta\ , \tag{1.1}$$

где ω_α^β –формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0. \tag{1.3}$$

Принимая формы

$$\omega_1^4=\omega_1, \quad \omega_2^4=\omega_2 \tag{1.4}$$

за независимые первичные формы, запишем пфаффову систему уравнений пары $\Psi_{2,3}$ в виде:

$$\omega_i^j=\Gamma_i^{jk}\omega_k, \quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k, \quad \omega_3^4=0,$$
$$\omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k, \quad \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k, \quad \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=a^k\omega_k. \tag{1.5}$$

Здесь и в дальнейшем $i,j,k=1,2$ и по индексам $i,j\ (i\neq j)$ суммирование не производится.

§2. Расслояемые пары $\Psi_{2,3}$.

Определение 1. Расслояемой парой $\Psi_{2,3}$, или парой $\oint$, называется пара $\Psi_{2,3}$, которая обладает следующими свойствами:

1) существует одностороннее расслоение от конгруэнции (C) коник C к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4),

2) существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) к прямолинейной конгруэнции (A_1,A_2),

3) характеристическая поверхность (A_3) не вырождается в линию,

4) точка A_3 инцидентна касательным плоскостям к поверхностям $(A_1), (A_2)$,

5) прямая A_3A_4 не инцидентна касательным плоскостям к поверхностям $(A_1), (A_2)$.

В силу условий 1), 2) для пар $\oint$ выполняются следующие квадратичные уравнения:

$$\omega_3^2\wedge\omega_1^2=0, \quad \omega_3^1\wedge\omega_2^1=0, \quad \omega_3^1\wedge\omega_3^2-\omega_2^3\wedge\omega_3^2+\omega_1\wedge\omega_4^1=0,$$
$$\omega_1^3\wedge\omega_3^2+\omega_1\wedge\omega_4^2=0, \quad (\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3)\wedge\omega_3^2+\omega_3^1\wedge\omega_1^2=0,$$
$$(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3)\wedge\omega_3^1+\omega_3^2\wedge\omega_2^1=0, \quad \omega_2^3\wedge\omega_3^1+\omega_2\wedge\omega_4^1=0, \tag{2.1}$$
$$\omega_4^k\wedge\omega_k^3=0, \quad \omega_3^k\wedge\omega_k=0, \quad \omega_3^1\wedge\omega_3^2+\omega_1^3\wedge\omega_3^1+\omega_4^2\wedge\omega_2=0.$$

Так как поверхность (A_3) не вырождается в линию, то

$$\omega_3^1\wedge\omega_3^2\neq 0, \tag{2.2}$$

или

$$\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22}-\Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21}\neq 0. \tag{2.3}$$

В силу условий 4), 5) определения пары $\oint$ имеем:

$$\Gamma_1^{22}=\Gamma_2^{11}=0, \quad \Gamma_1^{21}\neq 0, \quad \Gamma_2^{12}\neq 0. \tag{2.4}$$

тогда первые два уравнения системы (2.1) дадут

$$\Gamma_3^{11}=0, \quad \Gamma_3^{22}=0. \tag{2.5}$$

Замыкая уравнение

$$\omega_3^4 = 0, \qquad (2.6)$$

получим

$$\Gamma_3^{12} = \Gamma_3^{21}.$$

С учетом неравенства (2.3) вершины репера R можно пронормировать так, что

$$\Gamma_3^{12} = 1, \qquad (2.7)$$

тогда будем иметь

$$\omega_3^1 = \omega_2, \quad \omega_3^2 = \omega_1 \qquad (2.8)$$

Обозначим

$$\theta_1 = \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4, \quad \theta_2 = \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3. \qquad (2.9)$$

Из системы (2.I) и замыканий уравнений (2.8) получим:

$$\theta_2 \wedge \omega_1 - \Gamma_1^{21} \omega_1 \wedge \omega_2 = 0, \quad \theta_2 \wedge \omega_2 + \Gamma_2^{12} \omega_1 \wedge \omega_2 = 0, \qquad (2.10)$$

$$\theta_1 \wedge \omega_2 + 2\Gamma_1^{21} \omega_1 \wedge \omega_2 = 0, \quad \theta_1 \wedge \omega_2 - 2\Gamma_2^{12} \omega_1 \wedge \omega_2 = 0, \qquad (2.11)$$

откуда следует

$$(\theta_1 + 2\theta_2) \wedge \omega_1 = 0, \quad (\theta_1 + 2\theta_2) \wedge \omega_2 = 0. \qquad (2.12)$$

Из уравнений (2.I2) получаем

$$\theta_1 + 2\theta_2 = 0. \qquad (2.13)$$

В силу условия эквипроективности (1.3) последнее равенство приводится к виду:

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 = 0. \qquad (2.14)$$

Тогда из уравнений (2.I0) с учетом (2.I4) будем иметь:

$$\omega_3^3 = \Gamma_2^{12} \omega_1 + \Gamma_1^{21} \omega_2. \qquad (2.15)$$

Обозначим

$$\Gamma_1^{31} = \alpha, \ \Gamma_1^{32} = \beta, \ \Gamma_2^{31} = \gamma. \qquad (2.16)$$

Замыкая уравнение (2.I4), получим

$$2(\omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^2) + \omega_1 \wedge \omega_4^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0. \qquad (2.17)$$

В то же время система (2.I) дает следствие

$$\omega_1 \wedge \omega_4^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^2 - \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 = 0. \qquad (2.18)$$

Сравнивая уравнение (2.I7), (2.I8) с учетом (2.8), находим:

$$\omega_1^3 \wedge \omega_2 + \omega_2^3 \wedge \omega_1 = 0, \qquad (2.19)$$

$$\omega_1 \wedge \omega_4^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0, \qquad (2.20)$$

откуда

$$\omega_1^3 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2^3 = \gamma\omega_1 + \alpha\omega_2 \qquad (2.21)$$

а также

$$\Gamma_4^{12} = \Gamma_4^{21}. \qquad (2.22)$$

Коэффициенты $\Gamma_4^{11}, \Gamma_4^{12}, \Gamma_4^{22}$ теперь однозначно находятся из системы (2.I):

$$\Gamma_4^{11} = \gamma \,; \quad \Gamma_4^{12} = 1 - \alpha \,; \quad \Gamma_4^{22} = \beta \,. \tag{2.23}$$

Имеем:

$$\omega_4^1 = \gamma\,\omega_1 + (1-\alpha)\,\omega_2 \,; \quad \omega_4^2 = (1-\alpha)\,\omega_1 + \beta\,\omega_2 \,. \tag{2.24}$$

Таким образом, пары ℓ определяются следующей системой Пфаффа:

$$\begin{gathered}
\omega_1^2 = \Gamma_1^{21}\,\omega_1 \,, \quad \omega_2^1 = \Gamma_2^{12}\,\omega_2 \,, \quad \omega_1^3 = \alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_2 \,, \\
\omega_2^3 = \gamma\,\omega_1 + \alpha\,\omega_2 \,, \quad \omega_3^1 = \omega_2 \,, \quad \omega_3^2 = \omega_1 \,, \quad \omega_3^4 = 0 \,, \\
\omega_4^1 = \gamma\,\omega_1 + (1-\alpha)\,\omega_2 \,, \quad \omega_4^2 = (1-\alpha)\,\omega_1 + \beta\,\omega_2 \,, \\
\omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\,\omega_k \,, \quad \omega_3^3 = \Gamma_2^{12}\,\omega_1 + \Gamma_1^{21}\,\omega_2 \,, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 = 0 \,.
\end{gathered} \tag{2.25}$$

Замыкая первые два уравнения этой системы, получим

$$\delta\left(\Gamma_1^{21} - \Gamma_2^{12}\right) = \left(\Gamma_1^{21} + \Gamma_2^{12}\right)\pi_1^1 \,, \tag{2.26}$$

где δ -символ дифференцирования, π_1^1-значение формы ω_1^1 при фиксированных первичных параметрах.

В силу равенства (2.26) и учитывая 5) определения I, оставшуюся нормировку вершин репера R можно осуществить так, что

$$\Gamma_1^{21} - \Gamma_2^{12} = 0 \,. \tag{2.27}$$

Полагая

$$\Gamma_1^{21} = \Gamma_2^{12} = 2\lambda \,, \tag{2.28}$$

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = 2\,(p\,\omega_1 + q\,\omega_2) \,, \tag{2.29}$$

получим

$$\omega_1^2 = 2\lambda\,\omega_1 \,, \quad \omega_2^1 = 2\lambda\,\omega_2 \,, \tag{2.30}$$

$$\omega_3^3 = 2\lambda\,(\omega_1 + \omega_2) \,. \tag{2.31}$$

Замыкания уравнений (2.30) имеют вид:

$$d\lambda \wedge \omega_1 + \lambda\,(q - 3\lambda)\,\omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \,, \tag{2.32}$$

$$d\lambda \wedge \omega_2 + \lambda\,(3\lambda + p)\,\omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \,, \tag{2.33}$$

откуда

$$d\lambda = -\lambda\,(3\lambda + p)\,\omega_1 - \lambda\,(q - 3\lambda)\,\omega_2 \,. \tag{2.34}$$

Замыкание уравнения (2.3I) с учетом (2.34) дает

$$q = -p \,. \tag{2.35}$$

В силу последнего равенства имеем:

$$-\,d\ln\lambda = (3\lambda + p)(\omega_1 + \omega_2) \,, \tag{2.36}$$

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = 2p\,(\omega_1 - \omega_2) \,. \tag{2.37}$$

Продолжая систему (2.36), (2.37), находим

$$dp = [p(p-3\lambda) - \tfrac{1}{2}(\lambda^2+1)](\omega_1+\omega_2). \qquad (2.38)$$

Замыкая систему уравнений (2.25), получим следующие квадратичные уравнения:

$$d\beta\wedge\omega_2 + [6\lambda\beta - 2p\beta - 3\lambda]\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0, \qquad (2.39)$$

$$d\gamma\wedge\omega_1 + [3\lambda + 2p\gamma - 6\lambda\gamma]\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0, \qquad (2.40)$$

$$d\alpha\wedge\omega_1 + [3\lambda - 2\beta\lambda - 6\lambda\alpha - \Gamma^{32}_4]\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0, \qquad (2.41)$$

$$d\alpha\wedge\omega_2 + [6\alpha\lambda - 3\lambda + 2\gamma\lambda + \Gamma^{31}_4]\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0. \qquad (2.42)$$

Из (2.41), (2.42), находим

$$d\alpha = 3\lambda(1-2\alpha)(\omega_1+\omega_2) - 2\lambda(\gamma\omega_1+\beta\omega_2) - \omega^3_4. \qquad (2.43)$$

Замыкание уравнений (2.38), (2.43) удовлетворяются тождественно.

Положим

$$h = 3\lambda - 6\lambda\alpha, \quad \Omega = \omega_1+\omega_2. \qquad (2.44)$$

Замкнутая система уравнений пары $\mathfrak{f}$ состоит из пфаффовых уравнений

$$\omega^4_3 = 0, \quad \omega^2_1 = 2\lambda\omega_1, \quad \omega^1_2 = 2\lambda\omega_2, \quad \omega^1_3 = \omega_2,$$

$$\omega^2_3 = \omega_1, \quad \omega^1_1 + \omega^2_2 - \omega^3_3 = 0, \quad \omega^3_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$$

$$\omega^3_2 = \gamma\omega_1 + \alpha\omega_2, \quad \omega^1_4 = \gamma\omega_1 + (1-\alpha)\omega_2, \quad \omega^3_4 = \Gamma^{3k}_4\,\omega_k,$$

$$\omega^2_4 = (1-\alpha)\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega^3_3 = 2\lambda\Omega, \quad -d\ln\lambda = (3\lambda+p)\Omega,$$

$$dp = [p(p-3\lambda) - \tfrac{1}{2}(1+\lambda^2)]\,\Omega, \qquad (2.45)$$

$$d\alpha = (h - 2\gamma\lambda - \Gamma^{31}_4)\,\omega_1 + (h - 2\beta\lambda - \Gamma^{32}_4)\,\omega_2$$

и внешних квадратичных уравнений:

$$d\beta\wedge\omega_2 + [6\lambda\beta - 2p\beta - 3\lambda]\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0,$$

$$d\gamma\wedge\omega_1 + [2p\gamma - 6\lambda\gamma + 3\lambda]\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0, \qquad (2.46)$$

$$d\Gamma^{31}_4\wedge\omega_1 + d\Gamma^{32}_4\wedge\omega_2 + 6\lambda(\Gamma^{32}_4 - \Gamma^{31}_4)\,\omega_1\wedge\omega_2 = 0$$

Имеем

$$S_1 = 3, \quad q = 4, \quad S_2 = 1, \quad Q = N = 5.$$

Система (2.45), (2.46) в инволюции и определяет пару $\mathfrak{f}$ с произволом одной функции двух аргументов.

§3. Геометрические свойства пары $\mathfrak{f}$.

Матрица деривационных формул канонического репера пары $\mathfrak{f}$ имеет вид:

$$\left\| \begin{matrix} (\lambda+p)\omega_1 + (\lambda-p)\omega_2 & 2\lambda\omega_1 & \alpha\omega_1+\beta\omega_2 & \omega_1 \\ 2\lambda\omega_2 & (\lambda-p)\omega_1 + (\lambda+p)\omega_2 & \gamma\omega_1+\alpha\omega_2 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 2\lambda(\omega_1+\omega_2) & 0 \\ \gamma\omega_1 + (1-\alpha)\omega_2 & (1-\alpha)\omega_1+\beta\omega_2 & \Gamma^{31}_4\omega_1 + \Gamma^{32}_4\omega_2 & -4\lambda(\omega_1+\omega_2) \end{matrix} \right\| \qquad (3.1)$$

Т е о р е м а I. Поверхность (A_3) пары $\mathfrak{f}$ является квадрикой с прямолинейными образующими A_3A_i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение асимптотических линий поверхности (A_3) имеет вид:

$$\omega_1\omega_2 = 0 \tag{3.2}$$

Так как

$$d[A_1A_3]_{\omega_1=0} = \{-(\rho-3\lambda)\omega_2\}[A_1A_3],$$

$$d[A_2A_3]_{\omega_2=0} = \{(3\lambda-\rho)\omega_1\}[A_2A_3],$$

то прямые A_1A_3, A_2A_3 являются прямолинейными образующими поверхности (A_3).

Т е о р е м а 2. Торсы прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4) пары $\mathfrak{f}$ соответствуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) определяются одним и тем же уравнением:

$$\beta(\omega_2)^2 - \gamma(\omega_1)^2 = 0, \tag{3.3}$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

Т е о р е м а 3. Точки A_i пары $\mathfrak{f}$ являются фокальными точками конгруэнции (C) коник.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений для определения фокальных поверхностей и фокальных семейств конгруэнции (C) коник имеет вид:

$$\begin{gathered}(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0,\ \ x^4 = 0,\ \ x^k\omega_k = 0,\\ 2\lambda\{(x^1)^2 + (x^2)^2\omega_2\} + x^3\{x^1[(1-\alpha)\omega_1 - \beta\omega_2] + \\ + x^2[(1-\alpha)\omega_2 - \gamma\omega_1]\} + (x^3)^2[-\lambda(\omega_1+\omega_2)] = 0.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Исключая из последних двух уравнений системы (3.4) отношение $\omega_1 : \omega_2$, получим систему уравнений для определения фокальных поверхностей конгруэнции

$$\begin{gathered}(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0,\ \ x^4 = 0;\\ x^3\{2\lambda x^3(x^2 - x^1) + (x^2)^2\gamma - (x^1)^2\beta\} = 0.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Отсюда следует, что точки A_1 и A_2 являются фокальными точками конгруэнции (C). Система уравнений для определения оставшихся четырех фокальных точек конгруэнции запишется в виде:

$$\begin{gathered}(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0,\ x^4 = 0;\\ 2\lambda x^3(x^2 - x^1) + (x^2)^2\gamma - (x^1)^2\beta = 0.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Плоскость, проходящую через прямую A_3A_4 и единичную точку

$$E = A_1 + A_2$$

прямой A_1A_2, назовем плоскостью α

Т е о р е м а 4. В паре ℓ плоскость α определяется прямой A_3A_4 и линией пересечения касательных плоскостей к поверхностям $(A_1),(A_2)$ в точках A_1 и A_2 является плоскостью α.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$(N, A_3, A_4, E) = 0, \qquad (3.8)$$

где

$$N = 2\lambda(A_1 + A_2) + \alpha A_3 + A_4, \qquad (3.9)$$

то линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i) инцидентна плоскости α.

Т е о р е м а 5. Фокусы луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) пары ℓ гармонически делят точки A_1 и A_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определения фокусов

$$F = sA_1 + tA_2 \qquad (3.10)$$

луча A_1A_2, имеем уравнение:

$$t^2\gamma - s^2\beta = 0, \qquad (3.11)$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

Л и т е р а т у р а.

1. Малаховский В.С., Конгруэнции коник, порожденные расслояемой парой C_ℓ. "Дифференц. геометрия многообразий фигур", вып. I, Труды Калининградского ун-та, 1970, 5-26.

2. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. "Труды геом. семинара", М., ВИНИТИ АН СССР, 1971, т. 3, 193-220.

3. Овчинников В.М., Дифференцируемое отображение поверхности в многообразие квадратичных элементов. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып. 2, Калининградский университет, 1971, 38-42.